Teoria dei giochi applicata alle scienze sociali, esame 5 settembre 2006
Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale, Politecnico di MI, 2005/06

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 2 e 3 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

Esercizio 1
Si consideri la seguente tabella:

I \ II	L	C	R
T	$0, 0$	$2, -1$	$5, -2$
B	$-1, 0$	$3, 2$	$1, 3$

a) si assuma che le scelte siano effettuate contemporaneamente. Trovare gli equilibri di Nash per l'estensione mista del gioco.

b) si assuma che scelga prima I e poi II. Descrivere il gioco in forma estesa e trovarne gli equilibri perfetti nei sottogiochi.

c) commentare.

d) si supponga che I possa impegnarsi (in modo vincolante) a giocare una strategia mista che prevede di giocare T con probabilità p. Quale p sceglierà?

Soluzione
La ricerca degli equilibri in pure è immediata. Sottolineaiamo, al solito, i payoff corrispondenti alle migliori risposte:

I \ II	L	C	R
T	$\underline{0}, \underline{0}$	$2, -1$	$\underline{5}, -2$
B	$-1, 0$	$\underline{3}, 2$	$1, \underline{3}$

Da cui si vede che c'è un unico equilibrio in strategie pure: (T, L). Anche se questo non era richiesto dall'esercizio, abbiamo comunque un equilibrio che resterà tale per l'estensione mista e potrà servirci come controllo rispetto ad eventuali errori.

Cerchiamo la "best reply" di I.

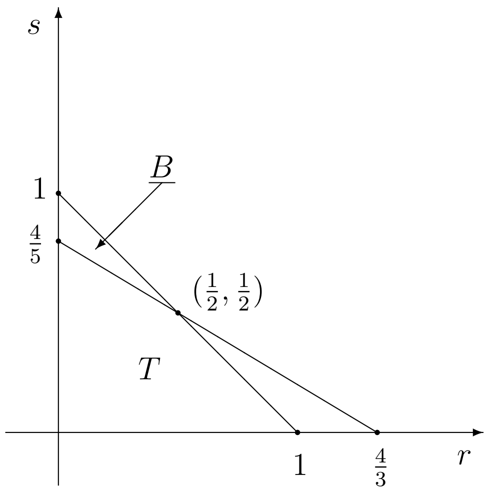
Se II usa la strategia mista $(r, s, 1 - r - s)$, i payoff per I sono:
- se gioca T: $2s + 5(1 - r - s) = -3s - 5r + 5$
- se gioca B: $-r + 3s + 1 - r - s = 2s - 2r + 1$

Quindi il payoff atteso per I, giocando T, è strettamente maggiore di quello che otterrebbe giocando B se e solo se:

$$-3s - 5r + 5 > 2s - 2r + 1 \quad \text{ovvero se} \quad 5s + 3r < 4$$

In figura indichiamo con T l'insieme delle strategie miste per cui è T la "best reply" e con B la zona per cui è invece B.

Laddove si ha $5s + 3r = 4$, ogni strategia di I è miglior risposta.



[Qui, tra parentesi, alcune considerazioni "superflue". Nel senso che seguo una strada diversa per risolvere l'esercizio, ma accenno qui a un altra possibile procedura.

Ora, possiamo osservare che, se I gioca T, la miglior risposta per II è L (ovvero, la strategia mista "degenere" $(1, 0, 0)$, rappresentata in figura dal punto di ascissa 1 e ordinata 0). Insomma, ritroviamo l'equilibrio in pure che già sappiamo esserci.

Ritroviamo quindi che, dei valori $(r, s, 1-r-s)$ tali che $5s+3r < 4$ (cioè per i quali T è la miglior risposta), il solo valore $(1, 0, 0)$ è a sua volta miglior risposta a T. Quindi ritroviamo l'equilibrio che già avevamo in pure. Altri equilibri, per cui $5s + 3r < 4$, non ce ne sono.

Se invece I gioca B, la miglior risposta per II è R (ovvero, la strategia mista "degenere" $(0, 0, 1)$, rappresentata in figura dall'origine degli assi coordinati). Ma l'origine delle coordinate non appartiene alla zona individuata da B in figura (ovvero, la miglior risposta alla strategia R non è B).

Quindi per $5s + 3r < 4$ non troviamo equilibri.

Resta da studiare cosa succeda per $5s + 3r = 4$.

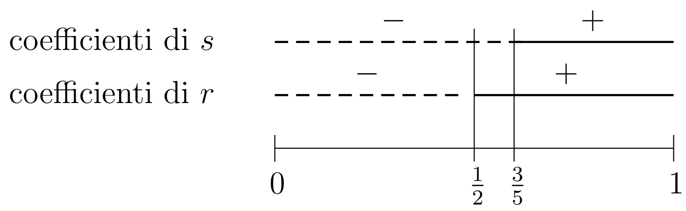
E qui mi fermo con perseguire questa strada. I conti per poter "andare avanti" si trovano comunque nel seguito della risoluzione.]

Passiamo a determinare la miglior risposta di II.

Calcoliamo allora il payoff atteso per II, assumendo che I giochi una generica strategia mista $(p, 1-p)$ e che II giochi la strategia $(r, s, 1-r-s)$. Otteniamo:

$$0 \cdot p \cdot r + -1 \cdot p \cdot s + (-2) \cdot p \cdot (1-r-s) + 0 \cdot (1-p) \cdot r + 2 \cdot (1-p) \cdot s + 3 \cdot (1-p) \cdot (1-r-s) =$$

$$= (2p-1)s + (5p-3)r - 5p + 3$$



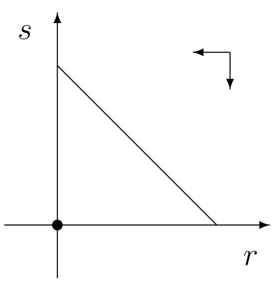
Dall'espressione trovata per il payoff si vede che non c'è alcun valore di p per cui si annullino contemporaneamente i coefficienti di r e di s (vedasi anche la figura qui sopra).

La miglior risposta sarà quindi da trovare, per ogni dato p, sul bordo del simplesso che rappresenta le strategie miste a disposizione di II.

Per trovarla, si può effettuare un canonico ragionamento analitico, ma può valere la pena di farsi una idea (convincente. . .) con qualche disegno.

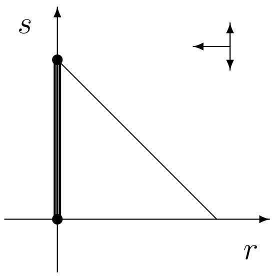
Nei disegni seguenti useremo delle piccole frecce per indicare in quale direzione aumenta il valore del payoff atteso per II al variare di r e al variare di s (un po' come se ne rappresentassimo il gradiente, anche se non stiamo facendo esattamente questo).

caso:
$p < \frac{1}{2}$



visto che il payoff atteso di II aumenta al diminuire sia di r che di s, come indicato dalle due freccette, la best reply per II è nell'origine, evidenziata in figura

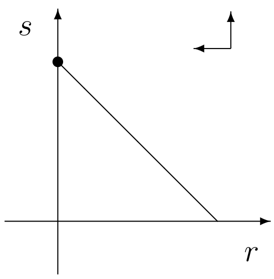
caso:
$p = \frac{1}{2}$



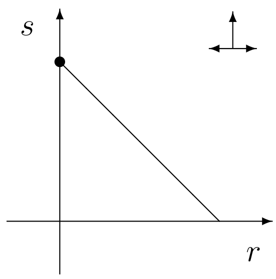
visto che il payoff atteso di II aumenta al diminuire di r e non dipende da s, come indicato dalle freccette, la best reply per II è tutto il segmento verticale evidenziato in figura

Procediamo...

caso:
$\frac{1}{2} < p < \frac{3}{5}$

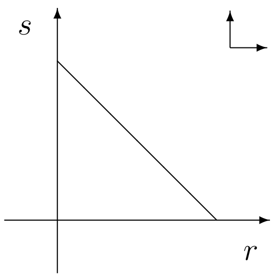


caso:
$p = \frac{3}{5}$



Per $p > 3/5$ le freccette ci dicono (vedi figura sotto) che la best reply per II sarà sicuramente un sottoinsieme del segmento inclinato. E' però importante sapere se è *tutto* il segmento o solo uno dei suoi vertici. Per questo, dobbiamo fare un ulteriore controllo.

caso:
$p > \frac{3}{5}$



non indichiamo la best reply per II perché al momento non siamo ancora in grado di determinarla (le freccette che abbiamo non bastano)

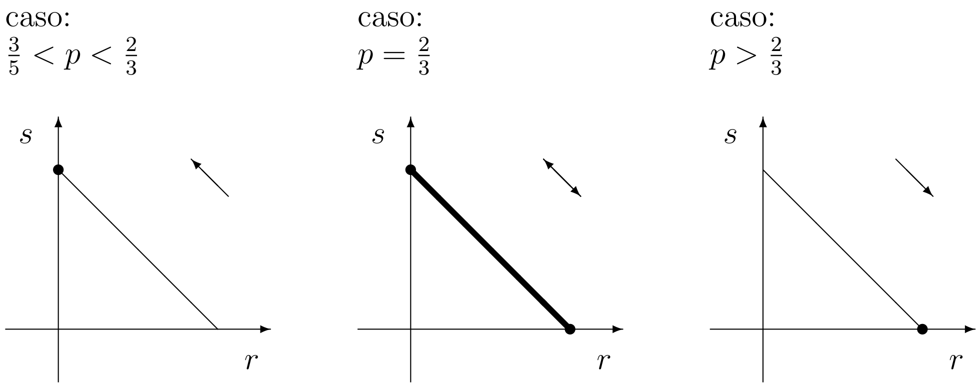
L'ulteriore controllo riguarda in quale direzione il payoff di II aumenti o diminuisca muovendosi lungo il segmento inclinato. Le figure sotto dovrebbero essere sufficientemente espressive:

Calcoliamo il payoff atteso di II, quando usa strategie miste t.c. $r+s=1$:

$$(2p-1)s+(5p-3)r-5p+3=(2p-1)(1-r)+(5p-3)r-5p+3=$$

$$=(5p--3-2p+1)r+(5p-3)r-5p+3+2p-1=(3p-2)r-3p+2$$

Quindi il payoff per II, limitatamente alle strategie t.c. $r+s=1$, aumenta (rispettivamente: diminuisce) all'aumentare di r se $p>2/3$ (rispettivamente: $p<2/3$).



A questo punto abbiamo determinato completamente la miglior risposta di II.

Volendo, possiamo anche fare un grafico (in $\mathbb{R}^3$) che faccia vedere quale sia l'intersezione fra le due migliori risposte e, quindi quali siano gli equilibri di Nash.

Nel grafico seguente, la miglior risposta di I è tratteggiata: sono tre pezzi, due orizzontali (con tratteggio orizzontale) ed uno verticale (con tratteggio verticale).

La miglior risposta di II è invece data dalla spezzata calcata.

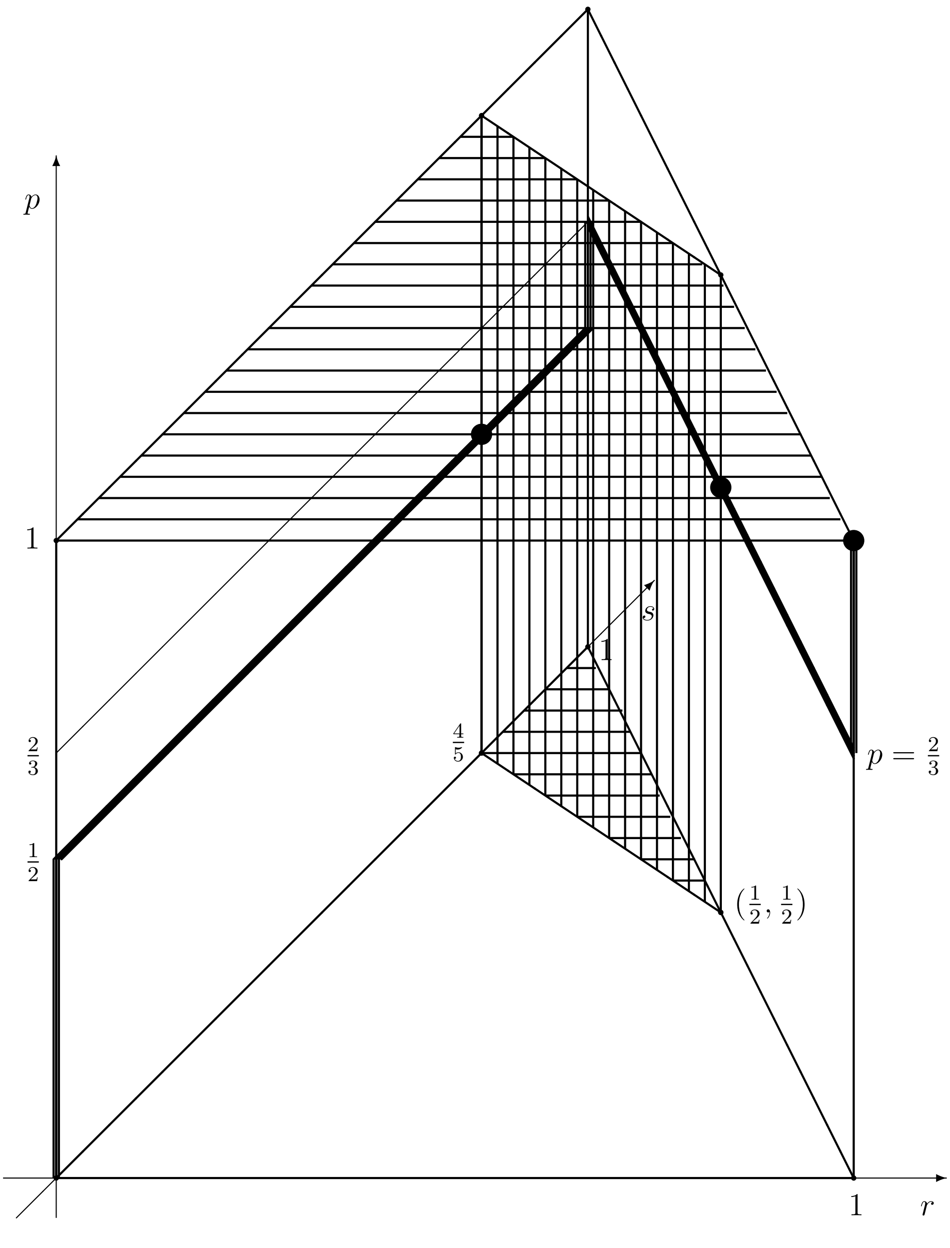
Infine, gli equilibri di Nash corrispondono alla intersezione dei grafici ridotti delle due migliori risposte. Ve ne sono tre, corrispondenti ai punti evidenziati con un grosso pallino. Tra questi c'è naturalmente anche l'equilibrio che già avevamo visto, in strategie pure: è il punto più a destra, corrispondente a $p=1$, $(r,s,1-r-s)=(1,0,0)$ e, quindi alla coppia di strategia pure (T,L) (con payoff atteso pari a 0 per entrambi i giocatori).

Gli altri due equilibri sono:

$$((p,1-p);(r,s,1-r-s))=((\frac{1}{2},\frac{1}{2});(0,\frac{4}{5},\frac{1}{5}))$$

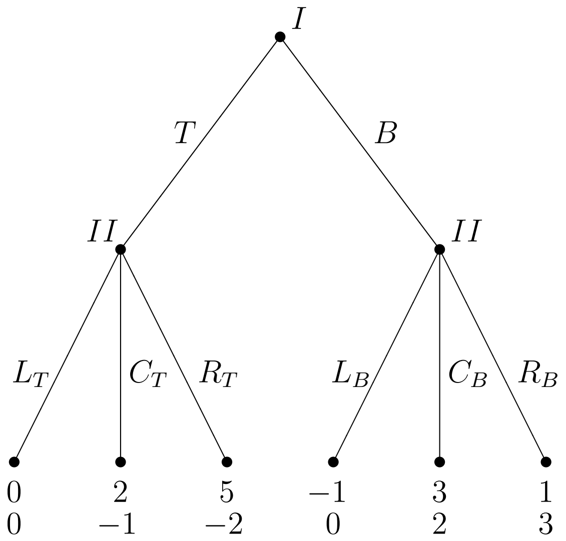
$$((p, 1-p); (r, s, 1-r-s)) = ((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0))$$

Con payoff attesi pari a, rispettivamente: $(26/10, 5/10)$ e $(1, 0)$.



b)
Anche se I sceglie prima di II, potrebbe essere che II non possa osservare la sua mossa e quindi ci si ritrova nel caso già visto al punto precedente. Quindi non è il caso di ricopiare l'analisi già fatta.

Vediamo allora cosa succede se II può osservare la scelta di I, In questo caso, ci conviene descrivere la situazione mediante un gioco in forma estesa ad informazione perfetta. Disegniamolo.



La forma strategica è:

I \ II	L_TL_B	L_TC_B	L_TR_B	C_TL_B	C_TC_B	C_TR_B	R_TL_B	R_TC_B	R_TR_B
T	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$2,-1$	$2,-1$	$2,-1$	$5,-2$	$5,-2$	$5,-2$
B	$-1,0$	$3,2$	$1,3$	$-1,0$	$3,2$	$1,3$	$-1,0$	$3,2$	$1,3$

Sottolineiamo le “best reply”:

I \ II	L_TL_B	L_TC_B	L_TR_B	C_TL_B	C_TC_B	C_TR_B	R_TL_B	R_TC_B	R_TR_B
T	$\underline{0},\underline{0}$	$0,\underline{0}$	$0,\underline{0}$	$\underline{2},-1$	$2,-1$	$\underline{2},-1$	$\underline{5},-2$	$\underline{5},-2$	$\underline{5},-2$
B	$-1,0$	$\underline{3},2$	$\underline{1},\underline{3}$	$-1,0$	$\underline{3},2$	$1,\underline{3}$	$-1,0$	$3,2$	$1,\underline{3}$

Abbiamo due equilibri di Nash: (T, L_TL_B) e (B, L_TR_B).

Visto che le strategie di equilibrio nei due sottogiochi propri sono, rispettivamente: L_T nel sottogioco di sinistra e R_B in quello di destra, l'unico SPE è (B, L_TR_B). Con payoff pari ad 1 per I e 3 per II.

c)
La situazione, fra il caso a mosse contemporanee e quello in cui muove prima I (e II osserva la sua scelta), non permette di dire in modo agevole quale delle due situazioni sia preferibile per I. E' pur vero che nel caso di mosse contemporanee vi è un equilibrio con payoff pari a 2.6 e quindi meglio di 1, il payoff che ottiene nel SPE; tuttavia, essendovi tre equilibri per il gioco in forma strategica la previsione di quale venga giocato non è scontata.

Si può però osservare che l'equilibrio con payoff $(2.6, 0.5)$ domina fortemente, in termini di payoff, gli altri due equilibri del gioco a mosse contemporanee. Ciò ci potrebbe indurre a ritenere che la scelta di entrambi i giocatori si potrebbe orientare per l'adozione delle strategie che conducono a quell'equilibrio.

Se siamo convinti di questo, allora è chiaro che I preferisce la situazione a mosse contemporanee, mentre II preferisce (e quest'ultima affermazione è indubitabile) il caso a mosse consecutive in cui può aspettarsi un payoff pari a 3.

d)
Per quanto riguarda questa domanda, sapere che I gioca la strategia mista p non è molto interessante per II se egli ha la possibilità di osservare la scelta di I. Chiaramente, II ignorerà l'annuncio di I e si limiterà a giocare L_T se I avrà scelto T e R_B se avrà scelto B. Che le scelte di I siano frutto di quanto si era impegnato a fare (e quindi effetto di una estrazione a sorte fatta assegnando probabilità p alla scelta T) oppure no, non ha alcuna rilevanza per II. Tutt'al più possiamo notare che il payoff atteso varrà $1-p$ per I e $3(1-p)$ per II. [Commento fuori testo: se proprio I può e deve fare questa dichiarazione cui deve tener fede, gli conviene dichiarare $p = 1$. Che venga fuori, in un gioco con una struttura come questo, lo SPE, non dovrebbe stupire]

L'unico caso in cui il "commitment irrevocabile" di I è interessante è nel caso in cui i due giocatori debbano fare le loro scelte (dopo l'annuncio) contemporaneamente. O, per ricordare quanto detto prima per il punto b), quando II non può osservare la scelta fatta da I.

Se la scelta di "p" è un "commitment irrevocabile", a II non rimane altro che usare la "best reply" a p.

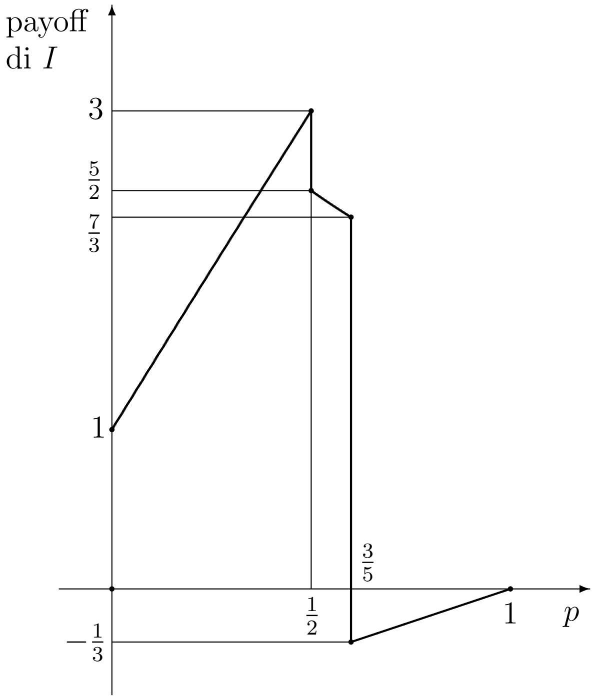
Per questa, abbiamo la tabella (implicitamente usata per il punto "a)"...):

	"best reply" di II			payoff per I
p	r	s	$1-r-s$	
$0 < p < 1/2$	0	0	1	$5p + 1(1-p) = 4p + 1$
$p = 1/2$	0	s	$1-s$	$\frac{6-s}{2}$
$1/2 < p < 3/5$	0	1	0	$2p + 3(1-p) = 3-p$
$p = 3/5$	0	1	0	idem
$3/5 < p < 2/3$	0	1	0	idem
$p = 2/3$	$1-s$	s	0	$\frac{8s-1}{3}$
$p > 2/3$	1	0	0	$0p + (-1)(1-p) = p-1$

Il valore che si trova nella riga corrispondente a $p = 1/2$ deriva dal seguente calcolo:
$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot s + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (1-s) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot s + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1-s) = \frac{6-s}{2}$

Il valore che si trova nella riga corrispondente a $p = 2/3$ deriva dal seguente calcolo:
$\frac{2}{3} \cdot 0 \cdot (1-s) + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot s + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (1-s) + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot s = \frac{8s-1}{3}$

Disegniamo il "grafico" del payoff che I ottiene in corrispondenza delle diverse possibili scelte di p:



Si noti che per $p = 1/2$ e per $p = 2/3$ il payoff di I *non* risulta essere determinato. Questo perché II ha più di una strategia mista che è "best reply". Ne segue, proprio perché II è indifferente tra più di una strategia, che il payoff di I non è determinato dalla scelta di p e dalla razionalità di II. Più esplicitamente, se ad esempio I scegliesse $p = 1/2$, per II sarebbe indifferente usare una qualsivoglia strategia mista del tipo $(0, s, 1 - s)$. Solo che in corrispondenza dei diversi valori di s il payoff per I cambia. Esso varia da 3 (il valore di $\frac{6-s}{2}$ per $s = 0$) a $5/2$ (il valore di $\frac{6-s}{2}$ per $s = 1$).

Quindi, se il giocatore I sceglie p, il suo payoff (pur tenendo conto della razionalità di II, e quindi assumendo che II scelga una strategia di miglior risposta) non è determinato. Né possiamo determinarlo, con le informazioni che abbiamo a disposizione.

Non è, in particolare, affatto chiaro se $p = 1/2$ sia la scelta migliore per I, dovendo (volendo) dichiarare (in modo vincolante) quale strategia userà. Giocando $p = 1/2$, il suo payoff potrà essere uno qualsiasi nell'intervallo $[5/2, 3]$.

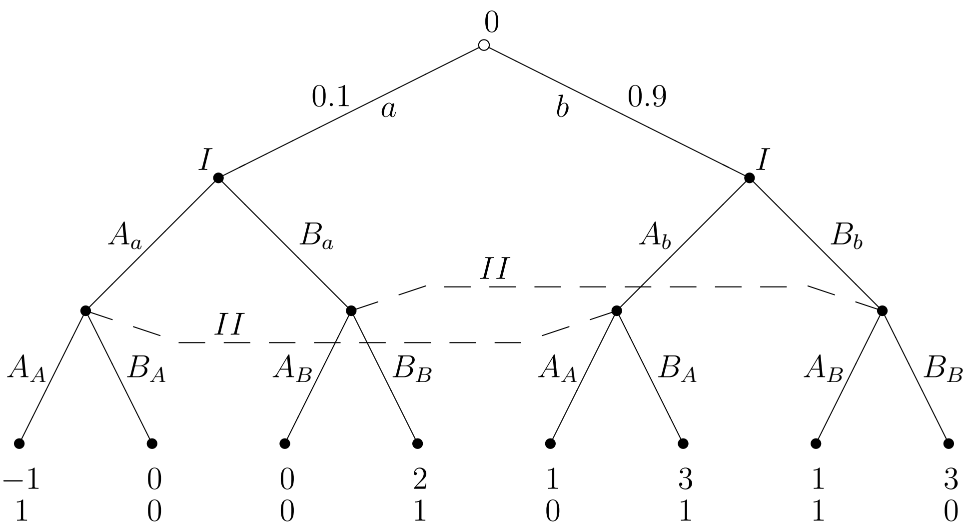
D'altro canto, se I dichiara $p = 1/2 - \varepsilon$, egli ottiene un payoff pari a $4(1/2 - \varepsilon) + 1 = 3 - 4\varepsilon$. Pertanto, è in grado di avvicinarsi "a piacere" ad un payoff "garantito" (sempre sulla base della ipotesi di razionalità di II) pari a 3. Non può però garantirsi un payoff pari a 3.

Insomma, non esiste una scelta ottimale di p. Anche se esistono scelte "quasi-ottimali" per ogni arbitrario grado di approssimazione che scegliessimo.

Esercizio 2 Discutere il ruolo, nella teoria dei giochi, delle ipotesi di razionalità ed intelligenza dei giocatori.

Esercizio 3 Illustrare esempi interessanti di giochi cooperativi.

Esercizio 4
Descrivere la forma strategica del gioco seguente e trovarne un equilibrio bayesiano perfetto. Discutere se possa esistere un equilibrio bayesiano perfetto con i belief seguenti (i nodi sono individuati dal ramo che perviene a tali nodi): dopo A_a [0], dopo B_a [0], dopo A_b [1] e dopo B_b [1].



Soluzione
Per ragioni "tipografiche" vedi la pagina seguente.

Vale la pena di vedere un metodo di "riempimento" sistematico della tabella. Cominciamo col seguire il ramo di sinistra (quando la sorte sceglie a, cosa che avviene con probabilità 1/10). Otteniamo quattro tabelle parziali, che poi dovremo sommare, assieme alle quattro tabelle parziali che otterremo dal ramo di destra.

A_a e A_A

$I \backslash II$	$A_A A_B$	$A_A B_B$	$B_A A_B$	$B_A B_B$
$A_a A_b$	$-1/10$ $\quad 1/10$	$-1/10$ $\quad 1/10$		
$A_a B_b$	$-1/10$ $\quad 1/10$	$-1/10$ $\quad 1/10$		
$B_a A_b$				
$B_a B_b$				

A_a e B_A

$I \backslash II$	$A_A A_B$	$A_A B_B$	$B_A A_B$	$B_A B_B$
$A_a A_b$			0 $\quad$ 0	0 $\quad$ 0
$A_a B_b$			0 $\quad$ 0	0 $\quad$ 0
$B_a A_b$				
$B_a B_b$				

B_a e A_B

$I \backslash II$	$A_A A_B$	$A_A B_B$	$B_A A_B$	$B_A B_B$
$A_a A_b$				
$A_a B_b$				
$B_a A_b$	0 $\quad$ 0		0 $\quad$ 0	
$B_a B_b$	0 $\quad$ 0		0 $\quad$ 0	

B_a e A_B

$I \backslash II$	$A_A A_B$	$A_A B_B$	$B_A A_B$	$B_A B_B$
$A_a A_b$				
$A_a B_b$				
$B_a A_b$		2/10 $\quad$ 1/10		2/10 $\quad$ 1/10
$B_a B_b$		2/10 $\quad$ 1/10		2/10 $\quad$ 1/10

Ora passiamo al ramo di destra...

A_b e A_A

$I \setminus II$	$A_A A_B$	$A_A B_B$	$B_A A_B$	$B_A B_B$
$A_a A_b$	9/10 0	9/10 0		
$A_a B_b$				
$B_a A_b$	9/10 0	9/10 0		
$B_a B_b$				

A_b e B_A

$I \setminus II$	$A_A A_B$	$A_A B_B$	$B_A A_B$	$B_A B_B$
$A_a A_b$			27/10 9/10	27/10 9/10
$A_a B_b$				
$B_a A_b$			27/10 9/10	27/10 9/10
$B_a B_b$				

B_b e A_B

$I \setminus II$	$A_A A_B$	$A_A B_B$	$B_A A_B$	$B_A B_B$
$A_a A_b$				
$A_a B_b$	9/10 9/10		9/10 9/10	
$B_a A_b$				
$B_a B_b$	9/10 9/10		9/10 9/10	

B_b e B_B

$I \setminus II$	$A_A A_B$	$A_A B_B$	$B_A A_B$	$B_A B_B$
$A_a A_b$				
$A_a B_b$		27/10 0		27/10 0
$B_a A_b$				
$B_a B_b$		27/10 0		27/10 0

La tabella finale è quindi:

$I \backslash II$	$A_A A_B$		$A_A B_B$		$B_A A_B$		$B_A B_B$	
$A_a A_b$	8/10	1/10	8/10	1/10	27/10	9/10	27/10	9/10
$A_a B_b$	8/10	10/10	26/10	1/10	9/10	9/10	27/10	0
$B_a A_b$	9/10	0	11/10	1/10	27/10	9/10	29/10	10/10
$B_a B_b$	9/10	9/10	29/10	1/10	9/10	9/10	29/10	1/10

Avendo a disposizione la forma strategica, possiamo trovare gli equilibri di Nash per poi vedere se corrispondono ad equilibri bayesiano perfetti. Sottolineiamo, come di consueto, la "best reply":

$I \backslash II$	$A_A A_B$		$A_A B_B$		$B_A A_B$		$B_A B_B$	
$A_a A_b$	8/10	1/10	8/10	1/10	$\underline{27/10}$	$\underline{9/10}$	27/10	$\underline{9/10}$
$A_a B_b$	8/10	$\underline{10/10}$	26/10	1/10	9/10	9/10	27/10	0
$B_a A_b$	$\underline{9/10}$	0	11/10	1/10	$\underline{27/10}$	9/10	$\underline{29/10}$	$\underline{10/10}$
$B_a B_b$	$\underline{9/10}$	$\underline{9/10}$	$\underline{29/10}$	1/10	9/10	$\underline{9/10}$	$\underline{29/10}$	1/10

Abbiamo tre equilibri di Nash:

$$(A_a A_b, B_A A_B), (B_a A_b, B_A B_B), (B_a B_b, A_A A_B)$$

che sono "indiziati" di essere equilibri bayesiani perfetti.

Verifichiamo (ne scelgo uno a caso) se $(B_a B_b, A_A A_B)$ lo è.

Tale profilo di strategie non determina i belief nell'insieme di informazione di sinistra di II, visto che esso non viene raggiunto in equilibrio. Invece, per quello di destra i belief devono essere 0.1 e 0.9 (per il nodo a sinistra e quello a destra, rispettivamente). Notiamo che, dati questi belief, essendo $0.9 > 0.1$, la scelta A_B è ottimale per II nell'insieme di informazione di destra. Quindi la condizione imposta dalla definizione di equilibrio bayesiano perfetto è soddisfatta.

Per quanto riguarda l'insieme di informazione di sinistra, si tratta di vedere se riusciamo a trovare un sistema di belief per II che possano giustificare la sua scelta della strategia A_A. Indicata con p la probabilità che viene assegnata da II a trovarsi nel nodo di sinistra di questo insieme di informazione, un semplice calcolo del payoff atteso ci dice che A_A è la scelta ottimale per II purché sia $p \geq 0.5$.

Quindi, un equilibrio bayesiano perfetto è, ad esempio:

$$(B_a B_b, A_A A_B; [1], [0]; [0.1], [0.9])$$

Infine, quanto alla domanda se possa esistere un equilibrio bayesiano perfetto con i belief:

"dopo A_a [0], dopo B_a [0], dopo A_b [1] e dopo B_b [1]",

la risposta è no. Infatti, qualunque sia la scelta di I nel nodo sinistro, uno dei due vertici che vengono dopo A_a e B_a dovrà per forza essere raggiunto con probabilità positiva (visto che la struttura del gioco ci dice che c'è una probabilità positiva di raggiungere il nodo dopo a).